Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $(0,3\cdot 10-1)(0,3\cdot 10+1)=8$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-6x+m=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2(x_1+x_2)=12$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt{5-x}=\sqrt{x+10}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care $\sin x=\cos x$, atunci $\cos 2x=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1,1))=3$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A(-ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det(A(m,n))=1$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-15X^2+mX-80$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=95$, arătați că $f(1)=1$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_1-x_2)+x_2(x_2-x_3)+x_3(x_3-x_1)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-10$.
5p	**a)** Arătați că $f'(0)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției f sunt concurente.
5p	**c)** Demonstrați că $e^{x^3}\geq(x+1)(x^2-x+1)$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)dx=4$.
5p	**b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=9$ are aria egală cu $2\ln 3$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, știind că $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,3\cdot 10-1)(0,3\cdot 10+1)=(3-1)(3+1)=$	**3p**
	$=2\cdot 4=8$	**2p**
2.	$x_1+x_2=6$, $x_1x_2=m$	**2p**
	$6m=12$, deci $m=2$	**3p**
3.	$4(5-x)=x+10\Rightarrow 20-4x=x+10\Rightarrow 5x=10$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{a-1}{4}\Leftrightarrow 4a=3a-3$	**3p**
	$a=-3$	**2p**
6.	$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=$	**2p**
	$=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0\cdot(\cos x+\sin x)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot 2=$	**3p**
	$=1+2=3$	**2p**
b)	$A(a,b)\cdot A(b,a)=\begin{pmatrix}a & 2b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 2a\\ -a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab-2ab & 2a^2+2b^2\\ -b^2-a^2 & -2ab+ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-ab & 2(a^2+b^2)\\ -(a^2+b^2) & -ab\end{pmatrix}=A(-ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det(A(m,n))=\begin{vmatrix}m & 2n\\ -n & m\end{vmatrix}=m^2+2n^2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, din $m^2+2n^2=1$ obținem $m=-1$, $n=0$ sau $m=1$, $n=0$	**3p**
2.a)	$f=X^3-15X^2+95X-80\Rightarrow f(1)=1^3-15\cdot 1^2+95\cdot 1-80=$	**2p**
	$=1-15+95-80=1$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=15$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=m$	**2p**
	$(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=0\Leftrightarrow 225-3m=0$, deci $m=75$	**3p**

c)	$2x_2 = x_1 + x_3$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Rightarrow x_2 = 5$	**2p**
	$x_1x_2x_3 = 80 \Rightarrow x_1x_3 = 16$ și, cum $x_1 + x_3 = 10$, polinomul f are rădăcinile 2, 5 și 8	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0) = e^0 - 1 = 0$	**2p**
b)	$f''(x) = e^x > 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f'$ este strict crescătoare, deci f' este injectivă	**2p**
	Pentru orice numere reale x_1 și x_2, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f'(x_1) \neq f'(x_2)$, deci tangentele la graficul lui f în punctele de coordonate $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ au pante diferite, deci sunt concurente	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	**1p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -9$, obținem $f(x) \geq -9$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(x^3) \geq -9 \Rightarrow e^{x^3} \geq x^3 + 1$, deci $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(x + \frac{9}{x} - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2} \Big\|_1^3 =$	**3p**
	$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	**2p**
b)	$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 9} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^9 \|g(x)\|\,dx = \int_1^9 \frac{2x}{x^2 + 9}\,dx = \ln(x^2 + 9) \Big\|_1^9 =$	**3p**
	$= \ln 90 - \ln 10 = \ln 9 = 2\ln 3$	**2p**
c)	$\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2+1}{2} \right)' \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x \Big\|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{2(x^2+1)}\,dx = \left(\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \Big\|_1^{\sqrt{3}} =$	**3p**
	$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, de unde obținem $a = 4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că primul termen este $b_1 = 2$ și rația este $q = 3$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-4$. Calculați suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x}=3-x$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{50}\}$, acesta să **nu** fie număr natural.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.
5p	**6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $(2\sin x+\cos x)^2-4\cos x(\sin x-\cos x)=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(x))=x^2+9$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Demonstrați că $A(2020-x)+A(2020+x)=2A(2020)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, pentru care $A(n)A(2-n)=2A(-6)$.
	2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.
5p	**a)** Arătați că $N=\sqrt{33}*\sqrt{31}$ este un număr natural.
5p	**b)** Determinați numărul $x\in M$ pentru care $(x*x*x)^2=300$.
5p	**c)** Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{-2020x}$. Arătați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(-\infty,0]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $-\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{10}$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$.
5p	**a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_e^{e^2} x^2 F(x)\,dx = \frac{3}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 6$, $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 18$	**3p**
	$b_1 + b_2 + b_3 = 2 + 6 + 18 = 26$	**2p**
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$	**2p**
	Suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții este egală cu 5	**3p**
3.	$4x = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$	**3p**
	$x = 1$, care convine, $x = 9$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 50 de elemente, deci sunt 50 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt $50 - 7 = 43$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{43}{50}$	**2p**
5.	Punctul $M(-2,3)$ este mijlocul laturii BC	**2p**
	Ecuația medianei din A este $y = 3$	**3p**
6.	$4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x - 4\cos x\sin x + 4\cos^2 x = 4 \Leftrightarrow 4\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos^2 x = 4$	**3p**
	$\cos^2 x = 0$, de unde obținem $x = \dfrac{\pi}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = x \cdot x - (-3) \cdot 3 =$	**3p**
	$= x^2 - (-9) = x^2 + 9$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(2020 - x) + A(2020 + x) = \begin{pmatrix} 2020 - x & 3 \\ -3 & 2020 - x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2020 + x & 3 \\ -3 & 2020 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4040 & 6 \\ -6 & 4040 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2\begin{pmatrix} 2020 & 3 \\ -3 & 2020 \end{pmatrix} = 2A(2020)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\begin{pmatrix} n & 3 \\ -3 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 - n & 3 \\ -3 & 2 - n \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -n^2 + 2n - 9 & 6 \\ -6 & -n^2 + 2n - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$	**3p**
	$n^2 - 2n - 3 = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 3$	**2p**
2.a)	$N = \sqrt{\sqrt{33}^2 + \sqrt{31}^2} = \sqrt{33 + 31} =$	**3p**
	$= \sqrt{64} = 8 \in \mathbb{N}$	**2p**
b)	$x * x = x\sqrt{2}$, $x * x * x = x\sqrt{3}$, unde $x \in M$	**2p**
	$\left(x\sqrt{3}\right)^2 = 300 \Leftrightarrow x^2 = 100$ și, cum $x \in M$, obținem $x = 10$	**3p**

c)	$f(x+y)=\sqrt{-2020(x+y)}=$	**2p**
	$=\sqrt{-2020x+(-2020y)}=\sqrt{(f(x))^2+(f(y))^2}=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(-\infty,0]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+5)-(x-2)\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{5+4x-x^2}{(x^2+5)^2}=\dfrac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{x\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=5$	**1p**
	$x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f e descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $x\in[-1,5]\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f e crescătoare pe $[-1,5]$ și $x\in[5,+\infty)\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f e descrescătoare pe $[5,+\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $f(5)=\dfrac{1}{10}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, obținem $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{10}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$F'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x^3}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{x^2(1-3\ln x)}{x^6}=$	**3p**
	$=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^e=\dfrac{\ln x}{x^3}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln e}{e^3}-\dfrac{\ln 1}{1^3}=\dfrac{1}{e^3}$	**2p**
c)	$\int_e^{e^2}x^2F(x)\,dx=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx=\dfrac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln^2 e^2-\ln^2 e}{2}=\dfrac{2^2-1^2}{2}=\dfrac{3}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 2$.
5p	**2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, a^2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 4$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 5x + 7} = x - 1$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
5p	**5.** Determinați numărul real m, pentru care vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. Arătaţi că $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A = 0$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(x)M(y) = M(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați perechile de numere naturale (m, n) pentru care $M(m)M(n) = M(6)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - x - y + 2$.
5p	**a)** Arătați că $x \circ y = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x \leq 5$.
5p	**c)** Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - e\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{x-e}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că graficul funcției f **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $e^x - x^e = 0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x(x+2)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx = 18$.
5p	**b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\displaystyle\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx = \frac{3\ln 2}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_3=2a_2$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=3a_2=3\cdot 2=6$	**3p**
2.	$f(a)=a^2 \Leftrightarrow a^2-4a+4=0$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x^2-5x+7=(x-1)^2$	**2p**
	$3x=6$, deci $x=2$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$\dfrac{m}{3}=\dfrac{5}{3}$	**3p**
	$m=5$	**2p**
6.	$(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=$	**2p**
	$=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\cdot 1=2$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{vmatrix}=4\cdot(-3)-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-12+12=0$	**2p**
b)	$M(x)M(y)=(I_2+xA)(I_2+yA)=I_2+xA+yA+xyAA$	**3p**
	Cum $AA=A$, obținem $M(x)M(y)=I_2+(x+y+xy)A=M(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$M(m+n+mn)=M(6)\Leftrightarrow m+n+mn=6$	**2p**
	$(m+1)(n+1)=7$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(6,0)$ sau $(0,6)$	**3p**
2.a)	$x\circ y=xy-x-y+1+1=$	**2p**
	$=x(y-1)-(y-1)+1=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x\circ x=(x-1)^2+1$, de unde obținem $(x-1)^2\le 4$	**2p**
	$x\in[-1,3]$	**3p**
c)	$1\circ x=1$, unde x este număr real	**2p**
	$1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2020^n=1\circ\left(2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2020^n\right)=1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-e(\ln x)'=$	**3p**
	$=1-e\cdot\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=x \Leftrightarrow f'(a)=1$	**3p**
	$\frac{a-e}{a}=1\Leftrightarrow a-e=a\Leftrightarrow e=0$, ceea ce este imposibil, deci graficul funcției f **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,e)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,e)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(e,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e,+\infty)$	**2p**
	$e^x-x^e=0\Leftrightarrow f(x)=0$ și, cum $f(e)=0$, ecuația $e^x-x^e=0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^3 x(x+2)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=9+9-0=18$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^2+2x)e^x dx=\left.(x^2+2x)e^x\right\|_0^1-\int_0^1(2x+2)e^x dx=$	**2p**
	$=3e-\left.(2x+2)e^x\right\|_0^1+\int_0^1 2e^x dx=3e-4e+2+2e-2=e$	**3p**
c)	$\int_1^n\frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx=\int_1^n\frac{x+1}{x^2+2x}dx=\left.\frac{1}{2}\ln(x^2+2x)\right\|_1^n=\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+2n}{3}$	**3p**
	$\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+2n}{3}=\frac{3\ln 2}{2}\Rightarrow n^2+2n-24=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge 1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=2$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$. Determinaţi numerele naturale x, pentru care $f(x)<7$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+8}=x+2$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(4,4)$, $C(1,a)$ și $D(2,1)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, pentru care dreptele AB și CD sunt paralele.
5p	**6**. Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care $AB=10$ și $\cos B=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & x\\ 2x & 1+2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale a pentru care $A(a)A(a)=A(5)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+y-4)-xy$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\ge x$.
5p	**c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*2019*(-2020)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=-x(x+2)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $0\le\frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\le 4$, pentru orice $x,y\in[-2,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^2\frac{1}{x^2}f(x)\,dx$.
5p	**c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $q=2$	**3p**
	$b_3=1\cdot 2^2=4$	**2p**
2.	$3x+1<7 \Leftrightarrow x<2$	**2p**
	Cum x este număr natural, obținem $x=0$ sau $x=1$	**3p**
3.	$x^2+8=(x+2)^2$	**2p**
	$x=1$, care convine	**3p**
4.	$C_4^2=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=$	**3p**
	$=6$	**2p**
5.	$m_{AB}=1$, $m_{CD}=1-a$, unde a este număr real	**2p**
	$m_{AB}=m_{CD} \Leftrightarrow 1-a=1 \Leftrightarrow a=0$	**3p**
6.	$\cos B=\dfrac{AB}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{10}{BC}$	**3p**
	$BC=20$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-2\cdot 1=$	**3p**
	$=6-2=4$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+x+y+xy+2xy & y+xy+x+2xy\\ 2x+2xy+2y+4xy & 2xy+1+2x+2y+4xy\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1+(x+y+3xy) & x+y+3xy\\ 2(x+y+3xy) & 1+2(x+y+3xy)\end{pmatrix}=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(a+a+3a\cdot a)=A(5) \Leftrightarrow 3a^2+2a-5=0$	**3p**
	$a=-\dfrac{5}{3}$ sau $a=1$	**2p**
2.a)	$x*y=-xy+5x+5y-25+5=$	**3p**
	$=-x(y-5)+5(y-5)+5=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$-(x-5)^2+5\geq x \Leftrightarrow (x-5)(x-4)\leq 0$	**3p**
	$x\in[4,5]$	**2p**
c)	$x*5=x$ și $5*y=y$, unde x și y sunt numere reale	**2p**
	$1*(-2)*3*(-4)*5*\ldots*2019*(-2020)=\big((1*(-2)*3*(-4))*5\big)*(-6)*\ldots*2019*(-2020)=$ $=5*\big((-6)*\ldots*2019*(-2020)\big)=5$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2(x+2)e^{-x}+(x+2)^2e^{-x}\cdot(-1)=$ $=\left(-x^2-2x\right)e^{-x}=-x(x+2)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2(x+2)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-2,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-2,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,+\infty)$ și, cum $f(0)=4$, obținem $f(x)\leq 4$, pentru orice $x\in[-2,+\infty)$ $x,y\in[-2,+\infty)\Rightarrow 0\leq f(x)\leq 4$ și $0\leq f(y)\leq 4\Rightarrow 0\leq f(x)f(y)\leq 16\Rightarrow 0\leq\sqrt{f(x)f(y)}\leq 4$, de unde obținem $0\leq\frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\leq 4$, pentru orice $x,y\in[-2,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\int_0^1x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_0^1=$ $=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2\frac{1}{x^2}f(x)\,dx=\int_1^2xe^x\,dx=(x-1)e^x\Big\|_1^2=$ $=e^2$	**3p** **2p**
c)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, deci $F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=x^2(x+3)e^x$, $x\in\mathbb{R}$ $F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-3)$, $F''(x)>0$, pentru orice $x\in(-3,0)$ și pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția F are un singur punct de inflexiune	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_7 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5 = 3$ și $b_6 = 6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-20$. Determinaţi numerele reale a, ştiind că $f(a)=a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x=\frac{1}{5^{3x}}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,1)$ şi $C(1,0)$. Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

5p **6.** Calculaţi $\cos 2x$, ştiind că $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ și $M(x)=A+xB$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\big(M(1)\big)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(y)M(x)$ dacă și numai dacă $x=y$.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $M(m^2+1)M(n^2)=M(n^2)M(m^2+1)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=x+y+7xy$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=7\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(y+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=5$.

5p **c)** Dați exemplu de numere distincte $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ pentru care numărul $a\circ b$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-x$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^e f'(x)\,dx=1$.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^e \frac{f^2(x)}{x}\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real p, $p>1$, ştiind că $\int_1^p x f(x)\,dx=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{3}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_6^2=b_5b_7 \Rightarrow 36=3b_7$	**3p**
	$b_7=12$	**2p**
2.	$a^2-20=a \Leftrightarrow a^2-a-20=0$	**3p**
	$a=-4$ sau $a=5$	**2p**
3.	$5^x=5^{-3x} \Leftrightarrow x=-3x \Leftrightarrow 4x=0$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 5 moduri, deci sunt $5\cdot 3=15$ numere impare de două cifre distincte, cu cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$	**3p**
5.	$AO=BO=CO$ și $O\in AC$, deci ΔABC este dreptunghic în B	**2p**
	Coordonatele ortocentrului triunghiului ABC sunt $x=0$, $y=1$	**3p**
6.	$\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$	**2p**
	$\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=A+B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(1))=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot 1=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
b)	$M(x)M(y)=AA+yAB+xBA+xyBB$, $M(y)M(x)=AA+xAB+yBA+yxBB$	**2p**
	Cum $AB=A$ și $BA=B$, obținem $yA+xB=xA+yB\Leftrightarrow (x-y)A=(x-y)B\Leftrightarrow x=y$	**3p**
c)	$m^2+1=n^2\Leftrightarrow (n-m)(n+m)=1$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, obținem $(m,n)=(0,-1)$ sau $(m,n)=(0,1)$	**3p**
2.a)	$x\circ y=7xy+x+y+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}=$	**3p**
	$=7x\left(y+\frac{1}{7}\right)+\left(y+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}=7\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(y+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$7\left(x+\frac{1}{7}\right)^2-\frac{1}{7}=5\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{7}\right)^2=\frac{36}{49}\Leftrightarrow x+\frac{1}{7}=-\frac{6}{7}$ sau $x+\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=\frac{5}{7}$	**2p**

c)	De exemplu, $a=\frac{1}{7}$ și $b=\frac{3}{7}$	**2p**
	$a\circ b=7\left(a+\frac{1}{7}\right)\left(b+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}=7\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=1\in\mathbb{N}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x-2(x-1)}{x^2}=$	**3p**
	$=\frac{x-2x+2x-2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-x\Leftrightarrow f'(a)=-1$	**3p**
	$\frac{a-2}{a^2}=-1\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow a=-2$, care nu convine sau $a=1$, care convine	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,2)$	**2p**
	$0<1<\frac{\pi}{2}<2\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(1)$ și, cum $f(1)=0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$	**3p**
2.a)	$\int_1^e f'(x)dx=f(x)\Big\vert_1^e=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\int_1^e \frac{f^2(x)}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}\ln^2 x\,dx=\frac{\ln^3 x}{3}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}$	**2p**
c)	$\int_1^p x f(x)dx=\int_1^p x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^p-\int_1^p\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{p^2}{4}+\frac{1}{4}$	**3p**
	$\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{p^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{3}{4}$ și, cum $p>1$, obținem $p=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(0,2\cdot 10-1)(0,2\cdot 10+1)=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{6-x}=\sqrt{x+14}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** Determinați numărul real a, pentru care $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$, unde $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

5p **6**. Arătați că $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$, știind că $\sin x=\frac{3}{5}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay=1 \\ 2x+y+az=4 \\ -3x-y+z=1 \end{cases}$, unde a este număr real și $A(a)$ matricea coeficienților sistemului.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Pentru $a=-1$, determinați soluția sistemului de ecuații.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional p, matricea $A(p)$ este inversabilă pentru orice număr rațional p.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=xy-101x-101y+10302$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-101)(y-101)+101$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale care sunt egale cu simetricul lor în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Determinați numerele întregi x și y, cu $x<y$, pentru care $x*y=202$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-5$.

5p **a)** Determinați panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că $e^x(1-x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_2^6\frac{2}{f(x)}dx$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_1^e\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{a}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,2\cdot 10-1)(0,2\cdot 10+1)=(2-1)(2+1)=$	**3p**
	$=1\cdot 3=3$	**2p**
2.	$x^2-2=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=2$	**2p**
3.	$4(6-x)=x+14 \Rightarrow 24-4x=x+14 \Leftrightarrow 5x=10$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	$\vec{u}+\vec{v}=(a+2)\vec{i}+(a+2)\vec{j}$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
6.	Cum $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$	**3p**
	$\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$\begin{cases}x-y=1\\2x+y-z=4\\-3x-y+z=1\end{cases}$ și $\det(A(-1))=-1\neq 0$, deci sistemul de ecuații admite soluție unică	**2p**
	$x=-5$, $y=-6$, $z=-20$	**3p**
c)	$A(p)=\begin{pmatrix}1&p&0\\2&1&p\\-3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(p))=-3p^2-p+1$, unde p este număr rațional	**2p**
	$-3p^2-p+1=0 \Leftrightarrow p=-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\notin\mathbb{Q}$ sau $p=-\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\notin\mathbb{Q}$, deci, pentru orice număr rațional p, $\det(A(p))\neq 0$, adică matricea $A(p)$ este inversabilă	**3p**
2.a)	$x*y=xy-101x-101y+10201+101=x(y-101)-101(y-101)+101=$	**3p**
	$=(x-101)(y-101)+101$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

b)	Elementul neutru al legii „$*$” este $e=102$	**2p**
	$x=x' \Leftrightarrow x*x=102 \Leftrightarrow (x-101)^2=1$, de unde obținem $x=100$ sau $x=102$	**3p**
c)	$x*y=202 \Leftrightarrow (x-101)(y-101)+101=202 \Leftrightarrow (x-101)(y-101)=101$	**2p**
	Cum x și y sunt numere întregi cu $x<y$ și 101 este număr prim, obținem $x=0$ și $y=100$ sau $x=102$ și $y=202$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f este egală cu $f'(0)=e^0-1=0$	**2p**
b)	$f''(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$ și, cum $f(0)=-4$, obținem $f(x)\ge -4$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f(-x)\ge -4$, deci $e^{-x}\ge -x+1$, de unde $e^x(1-x)\le 1$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{x^2+4}{x}-\frac{4}{x}\right)dx=\int_1^3 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\|_1^3=$	**3p**
	$=\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}=4$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_2^6\frac{2}{f(x)}dx=\int_2^6\frac{2x}{x^2+4}dx=\ln\left(x^2+4\right)\Big\|_2^6=$	**3p**
	$=\ln 40-\ln 8=\ln 5$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^e\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\|_1^e=\frac{e^2+1}{4}$	**3p**
	$\dfrac{e^2+1}{4}=\dfrac{e^2+1}{a}$, deci $a=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=5$ și rația $r=2$.
5p	**2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $x^2-ax+a-1=0$ are soluții reale distincte.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3-\sqrt[3]{x^2+x+2}=1$.
5p	**4.** Calculați $2C_4^3-3A_4^2$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+\left(a^2+1\right)\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB=8$, $BC=8$ și aria egală cu 16. Determinați măsura unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $M(x,y)=xI_2+yA$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(x,y)\cdot M(a,b)=M(xa+yb,xb+ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.
5p	**c)** Determinați perechile (x,y) de numere reale, știind că $\det\left(M(x,y)\right)=4$ și suma elementelor matricei $M(x,y)\cdot M(x,y)$ este egală cu 8.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-1$ și $x\circ y=xy-x-y+2$.
5p	**a)** Arătați că $2\circ(1*3)=(2\circ 1)*(2\circ 3)$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $3^{x\circ x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x*x}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $(x-1)*(2y+1)=2$ și $(x+y)\circ 4=10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}5x-3, & x\in(-\infty,1)\\ x^2-x+\sqrt{x^2+3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.
5p	**a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a>1$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(a,f(a)\right)$ **nu** este paralelă cu axa Ox.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+x+1$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2x}{2x}$.
5p	**a)** Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^4 g(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m>1$, pentru care $\int_1^m f(x)\cdot g(x)\,dx=20$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}=\frac{(2\cdot 5+4\cdot 2)\cdot 5}{2}=$	**3p**
	$=45$	**2p**
2.	$\Delta=a^2-4(a-1)=(a-2)^2$	**2p**
	$\Delta>0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{x^2+x+2}=2\Leftrightarrow x^2+x-6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=2$	**2p**
4.	$2C_4^3-3A_4^2=2\cdot\frac{4!}{3!(4-3)!}-3\cdot\frac{4!}{(4-2)!}=$	**2p**
	$=2\cdot 4-3\cdot 4\cdot 3=8-36=-28$	**3p**
5.	$\frac{1}{2}=\frac{a}{a^2+1}\Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin B}{2}\Leftrightarrow 16=\frac{8\cdot 8\cdot\sin B}{2}$	**3p**
	$\sin B=\frac{1}{2}$ și, cum triunghiul ABC este ascuțitunghic, obținem că unghiul B are măsura de 30°	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-1\cdot 1=$	**3p**
	$=0-1=-1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
	$M(x,y)\cdot M(a,b)=(xI_2+yA)(aI_2+bA)=xaI_2+xbA+yaA+ybA\cdot A=(xa+yb)I_2+(xb+ya)A=$ $=M(xa+yb,xb+ya)$ pentru orice numere reale a, b, x și y	**3p**
c)	$\det(M(x,y))=\begin{vmatrix}x & y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2-y^2$, pentru orice numere reale x și y, deci $(x-y)(x+y)=4$	**1p**
	$M(x,y)\cdot M(x,y)=M(x^2+y^2,2xy)\Rightarrow 2(x^2+y^2+2xy)=8$, deci $(x+y)^2=4$	**2p**
	$x+y=x-y=-2$ sau $x+y=x-y=2$, deci perechile sunt $(-2,0)$ sau $(2,0)$	**2p**
2.a)	$2\circ(1*3)=2\circ(1+3-1)=2\circ 3=2\cdot 3-2-3+2=3$	**2p**
	$(2\circ 1)*(2\circ 3)=(2\cdot 1-2-1+2)*(2\cdot 3-2-3+2)=1*3=1+3-1=3=2\circ(1*3)$	**3p**
b)	$x\circ x=x^2-2x+2$ și $x*x=2x-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$3^{x\circ x}=\left(3^{-2}\right)^{x*x}\Leftrightarrow x\circ x=-2\cdot(x*x)\Leftrightarrow x^2+2x=0$, deci $x=-2$ sau $x=0$	**3p**

c)	$(x-1)*(2y+1)=2 \Leftrightarrow x+2y=3$ și $(x+y)\circ 4=10 \Leftrightarrow x+y=4$	**3p**
	Obținem $x=5$, $y=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(5x-3)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(x^2-x+\sqrt{x^2+3}\right)=2$ și $f(1)=2$, deci $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, de unde obținem că f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=2x-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum $f'(a)>0$, pentru orice $a\in(1,+\infty)$, obținem că $f'(a)\neq 0$, deci tangenta la graficul funcției f în punctul A **nu** este paralelă cu axa Ox, pentru orice $a\in(1,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=2+\dfrac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1=$	**3p**
	$=\dfrac{\sqrt{x}+2x}{2x}=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcţiei g	**2p**
b)	$\int_1^4 g(x)dx=f(x)\Big\|_1^4=f(4)-f(1)=$	**3p**
	$=7-3=4$	**2p**
c)	$\int_1^m f(x)\cdot g(x)dx=\int_1^m f(x)\cdot f'(x)dx=\dfrac{1}{2}f^2(x)\Big\|_1^m=\dfrac{1}{2}\left(f^2(m)-f^2(1)\right)$	**3p**
	$f^2(m)-9=40 \Leftrightarrow f(m)=-7$, care nu convine sau $f(m)=7$, de unde obținem $m=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=2$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-11x+6$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care punctele $A(x,f(x))$ sunt situate sub axa Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(1-x)-\lg(7-x)=-1$.
5p	**4.** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=6$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2a-1,a^2)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care punctul A aparține dreptei d de ecuație $y=x+4$.
5p	**6.** Determinați $\cos 2x$, știind că x este număr real și $\sin x=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\a&1&1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-2z=1\\x-2y+z=2\\ax+y+z=3\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.
5p	**b)** Demonstrați că suma elementelor matricei $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ **nu** depinde de numărul real a.
5p	**c)** Pentru $a=-2$, arătați că sistemul de ecuații este incompatibil.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+m(x+y)$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $(-1)*1=-1$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Demonstrați că $x*y=(x+m)(y+m)-m^2$, pentru orice numere reale x, y și m.
5p	**c)** Pentru $m=-1$, determinați numerele reale x pentru care $5^x*5^{x+1}=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$.
	2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+e^x+m$, unde m este număr real, și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+e^x+4x+1$.
5p	**a)** Determinați numărul real m astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Pentru $m=4$, calculați $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Pentru $m=0$, calculați $\int_1^2 x\,f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $q=2$	**2p**
	$S_5=\frac{b_1(q^5-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(2^5-1)}{2-1}=31$	**3p**
2.	$f(x)<0\Leftrightarrow 3x^2-11x+6<0$	**2p**
	$\Delta=49$, deci $x\in\left(\frac{2}{3},3\right)$	**3p**
3.	$\lg\frac{1-x}{7-x}=-1\Rightarrow\frac{1-x}{7-x}=\frac{1}{10}$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$, care convine	**2p**
4.	$n+\frac{n(n-1)}{2}=6\Leftrightarrow n^2+n-12=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=3$	**2p**
5.	$A(2a-1,a^2)\in d\Leftrightarrow a^2=2a-1+4$	**2p**
	$a^2-2a-3=0$, deci $a=-1$ sau $a=3$	**3p**
6.	$\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^2=$	**2p**
	$=1-2\cdot\frac{144}{169}=-\frac{119}{169}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+(-2)+1-4-1-1=-9$	**3p**
b)	$B(a)=A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}2-2a&-3&-3\\a-1&6&-3\\2a+1&a-1&-2a+2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	Suma elementelor matricei $B(a)$ este egală cu 0, deci nu depinde de numărul real a	**2p**
c)	Pentru $a=-2$, sistemul devine $\begin{cases}x+y-2z=1\\x-2y+z=2\\-2x+y+z=3\end{cases}$	**2p**
	Adunând cele trei ecuații ale sistemului $(x+y-2z)+(x-2y+z)+(-2x+y+z)=1+2+3$, obținem $0=6$, fals, deci sistemul de ecuații este incompatibil	**3p**

2.a)	$(-1)*1=(-1)\cdot 1+m((-1)+1)=$	**3p**
	$=-1+m\cdot 0=-1$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$x*y=xy+mx+my+m^2-m^2=$	**2p**
	$=x(y+m)+m(y+m)-m^2=(x+m)(y+m)-m^2$, pentru orice numere reale x, y și m	**3p**
c)	$(5^x-1)(5^{x+1}-1)-1=-1 \Leftrightarrow 5^x-1=0$ sau $5^{x+1}-1=0$	**2p**
	$x=0$ sau $x=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+\frac{1}{x^2}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^2}=$	**3p**
	$=-\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{x^2(\sqrt{x}+1)}=-\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\frac{1}{x}+e^x+4$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	F este primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $m=4$	**2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^e=F(e)-F(1)=$	**3p**
	$=e^e+3e-3$	**2p**
c)	$\int_1^2 x f(x)\,dx=\int_1^2 x\left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx=\int_1^2\left(1+xe^x\right)dx=\left(x+(x-1)e^x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=2+e^2-1=e^2+1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\log_2 63-\log_2 7\right)\cdot\frac{1}{\log_2 3}=2$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $x^2+mx-m=0$ **nu** are soluții reale.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-20}=\frac{1}{81}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n!\le n(n-1)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(0,4)$ și $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că $a-1$, $2a$ și $2a+1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln a\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(e)\right)=e$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\det\left(A(a)\cdot A(a)\right)$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele $a, b\in(0,+\infty)$ pentru care $A(a)+A(b)=2A(a)\cdot A(b)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-3\sqrt{2}(x+y)+6+\sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 1=\sqrt{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x+3^x-4, & x\in(-\infty,1)\\ \frac{x^2-x+1}{x^2}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,1)$.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)\,dx=5$.

5p **b)** Calculați $\int_0^2 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este concavă.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\log_2 63-\log_2 7\right)\cdot\frac{1}{\log_2 3}=\log_2\frac{63}{7}\cdot\frac{1}{\log_2 3}=$	**2p**
	$=\log_2 3^2\cdot\frac{1}{\log_2 3}=2\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3}=2$	**3p**
2.	$\Delta=m^2+4m$, deci ecuația nu are soluții reale $\Leftrightarrow m^2+4m<0$	**3p**
	$m\in\left(-4,0\right)$	**2p**
3.	$3^{x^2-20}=3^{-4}\Leftrightarrow x^2=16$	**3p**
	$x=-4$ sau $x=4$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	$n!\le n\left(n-1\right)\Rightarrow n=2$ sau $n=3$, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+4\vec{j}$ și $\overrightarrow{OC}=a\vec{i}+b\vec{j}$, unde $C\left(a,b\right)$, deci $a\vec{i}+b\vec{j}=4\vec{i}+4\vec{j}$	**3p**
	$a=4$, $b=4$	**2p**
6.	Cum triunghiul este dreptunghic, $2a+1>a-1$ și $2a+1>2a\Rightarrow\left(2a+1\right)^2=\left(2a\right)^2+\left(a-1\right)^2$, deci $a^2-6a=0$	**2p**
	Cum a este număr real, $a>1$, obținem $a=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(e\right)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&e&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A\left(e\right)\right)=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&e&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=e+0+0-0-0-0=e$	**3p**
b)	$A\left(a\right)\cdot A\left(a\right)=\begin{pmatrix}1&0&2\ln a\\0&a^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A\left(a\right)\cdot A\left(a\right)\right)=a^2$, pentru orice $a\in\left(0,+\infty\right)$	**3p**
	$\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\begin{vmatrix}1&0&\ln a^2\\0&a^2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=a^2=\det\left(A\left(a\right)\cdot A\left(a\right)\right)$, pentru orice $a\in\left(0,+\infty\right)$	**2p**

c)	$A(a)+A(b)=\begin{pmatrix}2 & 0 & \ln(ab)\\ 0 & a+b & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln(ab)\\ 0 & ab & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2 & 0 & \ln(ab)\\ 0 & a+b & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\ln(ab)\\ 0 & 2ab & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow ab=1$ și $a+b=2$, de unde obținem $a=1$ și $b=1$	**2p**
2.a)	$\sqrt{2}\circ 1=3\cdot\sqrt{2}\cdot 1-3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)+6+\sqrt{2}=$	**2p**
	$=3\sqrt{2}-6-3\sqrt{2}+6+\sqrt{2}=\sqrt{2}$	**3p**
b)	$x\circ y=3xy-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+6+\sqrt{2}=$	**2p**
	$=3x\left(y-\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\circ y=\sqrt{2}$, unde x și y sunt numere reale	**2p**
	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\left(\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\circ\sqrt{2}\right)\circ\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\sqrt{2}\circ\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}\right)=\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(2^x+3^x-4\right)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$ și $f(1)=1$, deci $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, de unde obținem că f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$x\in(-\infty,1)\Rightarrow f(x)=2^x+3^x-4$, deci $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3$	**3p**
	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-\infty,1)$, deci funcția f este crescătoare pe $(-\infty,1)$	**2p**
c)	f este crescătoare pe $(-\infty,1)$ și continuă în $x=1$, deci $f(x)\le f(1)$ și, cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\le 1$, pentru orice $x\in(-\infty,1)$	**2p**
	$x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)=\frac{x-2}{x^3}$, deci $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,2)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$ și, cum f este continuă, $f(1)=1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, obținem $f(x)\le 1$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)dx=\int_0^1 (2x+4)dx=\left(x^2+4x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+4-0=5$	**2p**
b)	$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx=\ln\left(x^2+4x+3\right)\Big\vert_0^2=$	**2p**
	$=\ln 15-\ln 3=\ln 5$	**3p**
c)	$F'(x)=f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$, deci $F''(x)=\frac{-2\left(x^2+4x+5\right)}{\left(x^2+4x+3\right)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci orice primitivă F a funcției f este concavă	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Comparați numerele $\log_2 16$ și $\sqrt[3]{125}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(a+2)x+2a+1$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care graficul funcției f este tangent axei Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-x-2}=5^{3x-5}$.

5p **4.** Demonstrați că numerele C_4^1, A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,a)$ și $C(4,2a+1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6**. Determinați raza cercului circumscris triunghiului MNP, știind că $MN=16$ și $m(\sphericalangle P)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 1 & -1 & -a\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay-z=a\\ x-y-az=-1\\ ax-y+z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.

5p **b)** Determinați mulțumea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) pentru care $x_0=y_0=z_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+8}$.

5p **a)** Arătați că $2020*(-2020)=2$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(\mathbb{R},*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+8$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\,f(x))=2$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-2,+\infty)$.

5p **c)** Determinați $x\in[-1,+\infty)$ pentru care $f(x)\in\mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 \dfrac{x+1}{f(x)}\,dx=e^2-1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx$.

5p **c)** Se consideră numerele reale pozitive a, b și c. Demonstrați că, dacă $1-\int_0^a \frac{f(x)}{x+1}\,dx$, $1-\int_0^b \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ și $1-\int_0^c \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 16=\log_2 2^4=4$	**2p**
	Cum $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$, obținem că $\log_2 16<\sqrt[3]{125}$	**3p**
2.	$\Delta=(a+2)^2-4(2a+1)=a^2-4a$, unde a este număr real	**2p**
	Graficul funcției f este tangent axei $Ox \Leftrightarrow \Delta=0$, deci $a=0$ sau $a=4$	**3p**
3.	$x^2-x-2=3x-5 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=3$	**2p**
4.	$C_4^1=4$, $A_4^2=12$ și $A_5^2=20$	**3p**
	$12=\frac{4+20}{2}$, deci C_4^1, A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**
5.	$m_{AB}=\frac{a-1}{2}$, $m_{BC}=\frac{a+1}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	A, B și C sunt coliniare $\Rightarrow m_{AB}=m_{BC} \Rightarrow 3a-3=2a+2$, deci $a=5$	**3p**
6.	$\sin P=\frac{1}{2}$	**2p**
	$2R=\frac{MN}{\sin P} \Rightarrow R=16$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-1+1+(-1)-1-1-1=-4$	**3p**
b)	$\det(A(a))=-a(a^2+3)$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}^*$	**3p**
c)	Dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție și $x_0=y_0=z_0$, atunci $\begin{cases}x_0+ax_0-x_0=a\\x_0-x_0-ax_0=-1\\ax_0-x_0+x_0=-1\end{cases}$, unde a este număr real	**2p**
	Obținem $ax_0=1$ și $ax_0=-1$, ceea ce este imposibil	**3p**
2.a)	$2020*(-2020)=\sqrt[3]{2020^3+(-2020)^3+8}=\sqrt[3]{2020^3-2020^3+8}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{8}=2$	**2p**
b)	$x*e=x$, pentru orice număr real x, deci $\sqrt[3]{x^3+e^3+8}=x \Leftrightarrow x^3+e^3+8=x^3 \Leftrightarrow e=-2$	**3p**
	Cum $(-2)*x=\sqrt[3]{(-2)^3+x^3+8}=\sqrt[3]{x^3}=x$, pentru orice număr real x, obținem că $e=-2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**

c)	$f(x*y)=(x*y)^3+8=\left(\sqrt[3]{x^3+y^3+8}\right)^3+8=x^3+y^3+8+8=$	**2p**
	$=x^3+8+y^3+8=f(x)+f(y)$, pentru orice numere reale x și y, deci f este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x+4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{1+\frac{4}{x}}\right)=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$f'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+4)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**3p**
	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, deci f este descrescătoare pe $(-2,+\infty)$	**2p**
c)	f este continuă, f este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$, $f(-1)=\frac{4}{3}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci $f(x)\in\left(0,\frac{4}{3}\right]$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\in\mathbb{Z}$, deci $f(x)=1\Leftrightarrow x^2+4x+2=0$ și, cum $x\in[-1,+\infty)$, obținem $x=-2+\sqrt{2}$	**2p**
2.a)	$\int_0^2\frac{x+1}{f(x)}dx=\int_0^2 e^x dx=e^x\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=e^2-e^0=e^2-1$	**2p**
b)	$\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx=\int_0^1(x+1)^2e^x\,dx=\left(x^2+1\right)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2e-e^0=2e-1$	**2p**
c)	$\frac{f(x)}{x+1}=e^{-x}$, $x\in(0,+\infty)\Rightarrow 1-\int_0^a\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-a}$, $1-\int_0^b\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-b}$, $1-\int_0^c\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-c}$	**3p**
	e^{-a}, e^{-b} și e^{-c} sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice $\Leftrightarrow\left(e^{-b}\right)^2=e^{-a}\cdot e^{-c}$, deci $e^{-2b}=e^{-a-c}$, de unde obținem $2b=a+c$, adică a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care numerele $a-1$, 3 și $a+7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Determinați suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2}-3^x-8=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $C_n^2\le 3C_n^1$.

5p **5.** Determinați numerele reale m, $m\ne 2$, pentru care vectorii $\vec{u}=4\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-2)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Determinați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=5$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}(m^2-1)x+my+4z=1\\ x+y+z=0\\ mx+3y+z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m pentru care tripletul $(-1,0,1)$ este soluție a sistemului de ecuații.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numerele $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}$, pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0,y_0,z_0), cu $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+11xy$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=11\left(x+\frac{1}{11}\right)\left(y+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=\frac{8}{11}$.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $a=\left(1-\frac{1}{11}\right)\circ\left(1-\frac{2}{11}\right)\circ\left(1-\frac{3}{11}\right)\circ\left(1-\frac{4}{11}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\sqrt{x}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A\left(1,-\frac{1}{3}\right)$.

5p **c)** Demonstrați că $x\left(2\sqrt{x}-3\right)\ge -1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră funcția $f_n:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x^n+1}$.

5p **a)** Determinați primitiva $G:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x^3+1)f_3(x)$, știind că $G(0)=2020$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \le \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3^2=(a-1)(a+7)\Leftrightarrow a^2+6a-16=0$	**3p**
	Cum a este număr real, $a>1$, obținem $a=2$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-6=-x-3\Leftrightarrow x^2+x-3=0$	**3p**
	Cum $\Delta>0$, suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g este -1	**2p**
3.	$3^x\left(3^2-1\right)=8\Leftrightarrow 3^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile	**2p**
	$\frac{n(n-1)}{2}\le 3n\Leftrightarrow n(n-7)\le 0$ și, cum $n\in A$, obținem $n\in\{2,3,4,5,6,7\}$, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	**1p**
5.	$\frac{4}{m-2}=\frac{m}{2}\Rightarrow m^2-2m-8=0$	**2p**
	$m=-2$ sau $m=4$, care convin	**3p**
6.	$\cos A=\frac{1}{2}$ și $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$, deci $BC=\sqrt{21}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=9+\sqrt{21}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\begin{cases}-\left(m^2-1\right)+4=1\\ -1+1=0\\ -m+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2=4\\ m=2\end{cases}$	**3p**
	$m=2$	**2p**
b)	Matricea sistemului de ecuații este $A=\begin{pmatrix}m^2-1 & m & 4\\ 1 & 1 & 1\\ m & 3 & 1\end{pmatrix}$ și $\det A=-(m+7)(m-2)$, pentru orice număr real m	**3p**
	Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det A\ne 0$, deci $m\in\mathbb{R}\setminus\{-7,2\}$	**2p**
c)	$m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}\Rightarrow \det A\ne 0$ și sistemul de ecuații are soluția unică $\left(\frac{1}{m+7},-\frac{m+3}{m+7},\frac{m+2}{m+7}\right)$	**3p**
	Cum $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}$, numerele $\frac{1}{m+7}$, $-\frac{m+3}{m+7}$ și $\frac{m+2}{m+7}$ sunt întregi $\Leftrightarrow m=-8$ sau $m=-6$	**2p**

2.a)	$x \circ y = 11xy + x + y + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} = 11x\left(y + \frac{1}{11}\right) + \left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} =$	**3p**
	$= \left(y + \frac{1}{11}\right)(11x+1) - \frac{1}{11} = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$11\left(x + \frac{1}{11}\right)^2 - \frac{1}{11} = \frac{8}{11} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{11}\right)^2 = \frac{9}{121}$	**3p**
	$x = -\frac{4}{11}$ sau $x = \frac{2}{11}$	**2p**
c)	$a = 11^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{11} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} = 11^3 \cdot 1 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{11} - \frac{1}{11} = 720 - \frac{1}{11}$	**3p**
	$719 < 720 - \frac{1}{11} < 720$, deci partea întreagă a numărului a este egală cu 719	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x\right)' =$	**3p**
	$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{x} - 1$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$f'(1) = 0$, $f(1) = -\frac{1}{3}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = -\frac{1}{3}$	**3p**
c)	$f'(1) = 0$, $f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (0,1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$	**2p**
	Pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \ge f(1) \Rightarrow \frac{2}{3} x\sqrt{x} - x \ge -\frac{1}{3}$, de unde obținem $x\left(2\sqrt{x} - 3\right) \ge -1$	**3p**
2.a)	$g(x) = x^3$, $x \in (-1, +\infty)$, deci $G(x) = \frac{x^4}{4} + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**3p**
	Cum $G(0) = 2020$, obținem $c = 2020$, deci $G(x) = \frac{x^4}{4} + 2020$	**2p**
b)	$\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(x - \ln(x+1)\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - \ln 2$	**2p**
c)	$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1} \le x^n$, pentru orice număr natural nenul n și orice $x \in [0,1]$	**3p**
	$\int_0^1 f_n(x)dx \le \int_0^1 x^n\, dx$ și, cum $\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$, obținem $\int_0^1 f_n(x)dx \le \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)=-\log_2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, astfel încât $f(x)+f(-x)=2020$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{1-x}=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cuprins între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.

5p **6.** Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 2, 3 și 4. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=\det\left(A+I_2\right)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A\cdot A\cdot A=aI_2$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\neq n$, pentru care $\det\left(A+mI_2\right)=\det\left(A+nI_2\right)$.

2. Pe mulțimea $M=(0,1)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy}{1-x-y+2xy}$.

5p **a)** Arătați că $x\circ\dfrac{1}{2}=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $g'(x)+g(x)=\dfrac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f''(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) \ln x\,dx = e^2 + a$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)+\log_2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \log_2\left(\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\right)=0$	**3p**
	Cum $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1=1$, obținem că $\log_2\left(\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\right)=0$	**2p**
2.	$f(x)+f(-x)=2020 \Leftrightarrow 2x+a+2\cdot(-x)+a=2020$	**3p**
	$2a=2020$, deci $a=1010$	**2p**
3.	$3^x+\dfrac{3}{3^x}=4 \Leftrightarrow 3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0 \Leftrightarrow \left(3^x-1\right)\left(3^x-3\right)=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale cuprinse între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$ sunt 12 și 13, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{90}=\dfrac{1}{45}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DA}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\right)+\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DA}=\vec{0}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=$	**3p**
	$=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$	**2p**
6.	Considerăm ΔABC cu $AB=2$, $AC=3$ și $BC=4 \Rightarrow \cos A=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\dfrac{1}{4}$	**3p**
	$\cos A<0$, deci unghiul A este obtuz	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{vmatrix}=3\cdot(-4)-13\cdot(-1)=1$	**2p**
	$\det\left(A+I_2\right)=\begin{vmatrix}4 & 13\\ -1 & -3\end{vmatrix}=4\cdot(-3)-13\cdot(-1)=1$, deci $\det\left(A+I_2\right)=\det A$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-4 & -13\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**3p**
	$aI_2=I_2$, deci $a=1$	**2p**
c)	$\det\left(A+mI_2\right)=\begin{vmatrix}3+m & 13\\ -1 & -4+m\end{vmatrix}=m^2-m+1$, pentru orice număr natural m	**3p**
	$m^2-m+1=n^2-n+1 \Leftrightarrow (m-n)(m+n-1)=0$ și, cum m și n sunt numere naturale, $m\neq n$, obținem $m+n=1$, deci perechile sunt $(1,0)$ și $(0,1)$	**2p**

2.a)	$x \circ \frac{1}{2} = \dfrac{x \cdot \frac{1}{2}}{1 - x - \frac{1}{2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}} =$	**2p**
	$= \dfrac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x$, pentru orice $x \in M$	**3p**
b)	$x \circ y = \dfrac{xy}{1 - x - y + 2xy} = \dfrac{yx}{1 - y - x + 2yx} =$	**2p**
	$= y \circ x$, pentru orice $x,\ y \in (0,1)$, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**3p**
c)	$f(x) \circ f(y) = \dfrac{f(x) f(y)}{1 - f(x) - f(y) + 2f(x) f(y)} = \dfrac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{y}{y+1}}{1 - \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} + 2 \cdot \frac{xy}{(x+1)(y+1)}} =$	**3p**
	$= \dfrac{xy}{xy + x + y + 1 - xy - x - yx - y + 2xy} = \dfrac{xy}{xy+1} = f(xy)$, pentru orice $x,\ y \in (0, +\infty)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{(e^x + 1)e^x - (e^x + x)e^x}{e^{2x}} =$	**3p**
	$= \dfrac{(e^x + 1 - e^x - x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{1 - x}{e^x},\ x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ are panta $f'(1) = 0$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f și panta ei este 0, deci tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ și asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f sunt paralele	**3p**
c)	$f'(x) = (1 - x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (x - 2)e^{-x}$, deci $g(x) = (x - 2)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$g'(x) = (3 - x)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$, deci $g'(x) + g(x) = (3 - x)e^{-x} + (x - 2)e^{-x} = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 1) f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1)\left(4x - \dfrac{2x}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{x^2 + 1}\right) dx = \int_0^1 (4x^3 + 2x + 1) dx =$	**2p**
	$= (x^4 + x^2 + x)\Big\vert_0^1 = 1 + 1 + 1 - 0 = 3$	**3p**
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(4x - \dfrac{2x}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{x^2 + 1}\right) dx = \left(2x^2 - \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x\right)\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 2 - \ln 2 + \operatorname{arctg} 1 - 0 + \ln 1 - \operatorname{arctg} 0 = 2 - \ln 2 + \dfrac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\int_1^e \left(f(x) + \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}\right) \ln x\, dx = \int_1^e 4x \ln x\, dx = 2x^2 \ln x \Big\vert_1^e - \int_1^e 2x\, dx = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$	**2p**
	$e^2 + 1 = e^2 + a$, deci $a = 1$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi termenul a_2 al unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1+2a_2+a_3=4$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+6$. Arătați că numărul $f(3)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ este natural.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(4-x)=3-\log_5(24-x)$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 45 submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}-\vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6, respectiv 8. Determinați raza cercului înscris în acest triunghi.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}5-a&10\\-2&-4-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real a, știind că $A(a)\cdot A(a)=A(0)$.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1)\cdot X=A(0)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3x-2y+1$.
5p	**a)** Arătați că $5*8=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $2020^x*2020^x=2$.
5p	**c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, tangentele la graficul funcţiei f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(-a))$ sunt paralele.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{\ln x}$.
	2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\ln(2x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-2\ln(2x+1)\right)dx=\frac{1}{2}$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.
5p	**c)** Dacă F este o primitivă a funcției f, arătați că $F(\pi)\leq F\left(\frac{16}{5}\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_1+a_3=2a_2$, deci $a_1+2a_2+a_3=4a_2$	**3p**
	$a_2=1$	**2p**
2.	$f(3)=3^2+3+6=18$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+6=\frac{58}{9}$	**2p**
	$f(3)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)=18\cdot\frac{58}{9}=116$, care este număr natural	**3p**
3.	$\log_5\left((4-x)(24-x)\right)=3\Rightarrow(4-x)(24-x)=125\Rightarrow x^2-28x-29=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine, sau $x=29$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea are $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ submulțimi cu două elemente, unde n este numărul de elemente ale mulțimii, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, deci $\frac{n(n-1)}{2}=45$, de unde obținem $n^2-n-90=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=10$	**2p**
5.	$\vec{u}-\vec{v}=(a-1)\vec{i}+4\vec{j}$, $3\vec{v}=3\vec{i}-3\vec{j}$	**2p**
	Vectorii $\vec{u}-\vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari, deci $\frac{a-1}{3}=-\frac{4}{3}$, de unde obținem $a=-3$	**3p**
6.	Triunghiul are ipotenuza egală cu 10 și aria $S=\frac{6\cdot 8}{2}=24$	**2p**
	$r=\frac{S}{p}=\frac{24}{12}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -2 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}5 & 10\\ -2 & -4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=5\cdot(-4)-10\cdot(-2)=0$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}5-10a+a^2 & 10-20a\\ -2+4a & -4+8a+a^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\begin{pmatrix}5-10a+a^2 & 10-20a\\ -2+4a & -4+8a+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -2 & -4\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=0$	**2p**
c)	$A(-1)=\begin{pmatrix}6 & 10\\ -2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(-1))=2\neq 0$, deci $A(-1)$ este inversabilă și $(A(-1))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(-1))^{-1}\cdot A(0)$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$5*8=3\cdot 5-2\cdot 8+1=$ $=15-16+1=0$	**3p** **2p**
b)	$3\cdot 2020^x-2\cdot 2020^x+1=2 \Leftrightarrow 2020^x=1$ $x=0$	**2p** **3p**
c)	De exemplu, pentru $m=2k-1$ și $n=3k-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$, obținem $m*n=(2k-1)*(3k-1)=$ $=3(2k-1)-2(3k-1)+1=6k-3-6k+2+1=0$, deci există o infinitate de perechi (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$ $=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A(a,f(a))$ are panta $f'(a)=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ Tangenta la graficul funcţiei f în punctul $B(-a,f(-a))$ are panta $f'(-a)=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ și, cum, pentru orice număr real nenul a, $f'(-a)=f'(a)$, obținem că tangentele la graficul funcţiei f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(-a))$ sunt paralele	**2p** **3p**
c)	$f(x)-f(-x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}=2\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=2f(x)$, pentru orice număr real x $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f(x)}{\ln x}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{(\ln x)'}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=2$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1\left(x+2\ln(2x+1)-2\ln(2x+1)\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$ $=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^1=\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x+2\ln(2x+1)\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^1+\int_0^1(2x+1)'\ln(2x+1)dx=$ $=\frac{1}{2}+\left.(2x+1)\ln(2x+1)\right\|_0^1-\int_0^1 2\,dx=\frac{1}{2}+3\ln 3-2=3\ln 3-\frac{3}{2}$	**3p** **2p**
c)	$F'(x)=f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci funcția F este crescătoare pe $[0,+\infty)$ Cum $\pi<3,2=\frac{16}{5}$, obținem $F(\pi)\leq F\left(\frac{16}{5}\right)$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că modulul numărului complex $z=\frac{1+2i}{1-2i}$ este egal cu 1.
5p	**2.** Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ este pară.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre divizibile cu 3.
5p	**5.** În triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$, ecuația mediatoarei laturii AC este $y=3x+1$ și ecuația perpendicularei din A pe BC este $2y=x+7$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
5p	**6**. Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(a)\right)=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, astfel încât $A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{3}xy+x+y$.
5p	**a)** Demonstrați că $x\circ y=\frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-3$. Arătați că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Demonstrați că $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=\frac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și orice numere reale $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ și x_n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două asimptote ale graficului funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^4\left(f(x)-f(-x)\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>4$, astfel încât $\int_4^a \dfrac{f(x)}{x}dx=10+\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\lvert z\rvert=\frac{\lvert 1+2i\rvert}{\lvert 1-2i\rvert}=\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$	**2p**
2.	$f(-x)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^x+\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^x=$	**3p**
	$=\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x=f(x)$, pentru orice număr real x, deci funcția f este pară	**2p**
3.	$x+2=x^2\Rightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine, sau $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au ambele cifre divizibile cu 3 sunt $\overline{ab}$ cu $a\in\{3,6,9\}$ și $b\in\{0,3,6,9\}$, deci sunt 12 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$	**1p**
5.	Perpendiculara din A pe BC este și mediatoarea lui BC, deci coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC sunt soluțiile sistemului $\begin{cases}y=3x+1\\2y=x+7\end{cases}$	**3p**
	$x=1$, $y=4$	**2p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$	**2p**
	$-\sin x\cos x-\sin x\cos x=-1\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=1\Leftrightarrow \sin 2x=1$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(a)=\begin{pmatrix}1&\ln a\\0&1\end{pmatrix}=1\cdot 1-0\cdot\ln a=$	**2p**
	$=1-0=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&\ln a+\ln b\\0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&\ln(ab)\\0&1\end{pmatrix}=A(ab)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$	**2p**

c)	$A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=A\left(a^3\right)=\begin{pmatrix}1 & \ln a^3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\begin{pmatrix}1 & \ln a^3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow \ln a^3=2020\Leftrightarrow \ln a=\dfrac{2020}{3}\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{e^{2020}}$, care convine	**3p**
2.a)	$x\circ y=\dfrac{1}{3}xy+x+y+3-3=\dfrac{1}{3}x(y+3)+(y+3)-3=$	**2p**
	$=(y+3)\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)-3=\dfrac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$f(x)\circ f(y)=\dfrac{1}{3}\left(f(x)+3\right)\left(f(y)+3\right)-3=\dfrac{1}{3}(3x-3+3)(3y-3+3)-3=$	**2p**
	$=3xy-3=f(xy)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$f\left(\dfrac{x+3}{3}\right)=3\cdot\dfrac{x+3}{3}-3=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci $x_k=f\left(\dfrac{x_k+3}{3}\right)$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$	**2p**
	$x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=f\left(\dfrac{x_1+3}{3}\right)\circ f\left(\dfrac{x_2+3}{3}\right)\circ\ldots\circ f\left(\dfrac{x_n+3}{3}\right)=f\left(\dfrac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)}{3^n}\right)=$ $=3\cdot\dfrac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)}{3^n}-3=\dfrac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și orice numere reale $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ și x_n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}\cdot\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\cdot\dfrac{-2}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=\sqrt{3}$, $f'(2)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{5}{\sqrt{3}}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=1$, deci dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f, de unde obținem că punctul de intersecție a celor două asimptote este $(1,1)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\int\limits_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^3}{3}\Big\|_0^1=\dfrac{1}{3}$	**3p**

b)	$f(x)-f(-x)=x^2+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-(-x)^2-\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+9}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\int_0^4 (f(x)-f(-x))dx=\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx=2\sqrt{x^2+9}\Big\vert_0^4=2(5-3)=4$	**3p**
c)	$\int_4^a \frac{f(x)}{x}dx=\int_4^a\left(x+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\right)\Big\vert_4^a=\frac{a^2-16}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$	**3p**
	$\frac{a^2-16}{2}=10$ și, cum $a>4$, obținem $a=6$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numerele $\sqrt{11}-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ și $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$. Demonstrați că funcția f este impară.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+2^x=\frac{3}{4}$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-1,2)$. Determinați ecuația dreptei AD, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6**. Triunghiul ABC are $AB=10$ și $AC=5$. Arătați că $\sin C=2\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-3&0\\2&4&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=-1\\-2x-3y=1\\2x+4y+az=-2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a+2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, determinați inversa matricei $A(a)$.

5p **c)** Pentru $a\neq-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+2)(y+2)-2$.

5p **a)** Arătați că $x*(-2)=-2$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x-10}{5}$. Demonstrați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=23$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x-2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3-x-1}{x^2(x+1)}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^2+1}{x}-\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, astfel încât $\int_1^a f(x)\,dx=\frac{1}{2}-\ln\frac{a+1}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)=11-5=$	**2p**
	$=6=\left(\sqrt{6}\right)^2$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**3p**
2.	$f(-x)=\ln\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=$	**3p**
	$=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$, pentru orice $x\in(-1,1)$, deci funcția f este impară	**2p**
3.	$4\cdot 2^{2x}+4\cdot 2^x-3=0\Leftrightarrow\left(2\cdot 2^x-1\right)\left(2\cdot 2^x+3\right)=0$	**3p**
	Cum $2^x>0$, pentru orice număr real, obținem $2^x=\frac{1}{2}$, deci $x=-1$	**2p**
4.	Numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7\}$ este $A_4^3=$	**3p**
	$=\frac{4!}{(4-3)!}=4!=24$	**2p**
5.	$m_{BC}=1$ și, cum $AD \parallel BC$, obținem $m_{AD}=1$	**3p**
	Ecuația dreptei AD este $y+2=x+1$, deci $y=x-1$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$, deci $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$	**3p**
	$\sin C=2\sin B$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-2&-3&0\\2&4&a\end{vmatrix}=-3a+8+0-6-0+4a=$	**2p**
	$=-3a+4a+8-6=a+2$ pentru orice număr real a	**3p**
b)	$\det(A(0))=2\neq 0$	**2p**
	$A^{-1}(0)=\begin{pmatrix}0&-2&-\frac{3}{2}\\0&1&1\\-1&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**3p**
c)	Pentru $a\neq -2$, obținem $\det(A(a))\neq 0$, deci sistemul este Cramer	**2p**
	Soluția sistemului de ecuații este $(1,-1,0)$	**3p**
2.a)	$x*(-2)=5(x+2)(-2+2)-2=$	**3p**

	$= 0 - 2 = -2$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$f(x) * f(y) = 5(f(x)+2)(f(y)+2) - 2 = 5\left(\frac{e^x - 10}{5} + 2\right)\left(\frac{e^y - 10}{5} + 2\right) - 2 =$	**3p**
	$= 5 \cdot \frac{e^x}{5} \cdot \frac{e^y}{5} - 2 = \frac{e^{x+y} - 10}{5} = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x * x = 5(x+2)^2 - 2$, $x * x * x = 25(x+2)^3 - 2$	**2p**
	$25(x+2)^3 - 2 = 23 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 1$, deci $x = -1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 =$	**3p**
	$= \frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5} - x - 2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2} =$	**2p**
	$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = 0$, adică axa Ox, este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x+2 = \sqrt{x^2+4x+5} \Rightarrow x^2+4x+4 = x^2+4x+5 \Rightarrow 4 = 5$, fals, deci $f'(x) \neq 0$, pentru orice număr real x	**2p**
	f' are proprietatea lui Darboux, deci f' are semn constant și, cum $f'(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 < 0$, obținem că $f'(x) < 0$, pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare și, cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ și f este continuă, obținem $\operatorname{Im} f = (0, +\infty)$	**3p**
2.a)	$F'(x) = \frac{2x \cdot x - x^2 - 1}{x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x^2-1)(x+1) - x^2}{x^2(x+1)} =$	**3p**
	$= \frac{x^3 - x - 1}{x^2(x+1)} = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**2p**
b)	$\int_1^2 (x+1) f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^3 - x - 1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x + \frac{1}{x}\right)\Big\|_1^2 =$	**3p**
	$= 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \ln 1 + 1\right) = 1 - \ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^a f(x)\,dx = F(x)\Big\|_1^a = F(a) - F(1) = \frac{a^2+1}{a} - \ln(a+1) - 2 + \ln 2 = \frac{a^2+1}{a} - \ln\frac{a+1}{2} - 2$	**3p**
	$\frac{a^2+1}{a} - \ln\frac{a+1}{2} - 2 = \frac{1}{2} - \ln\frac{a+1}{2}$, deci $\frac{a^2+1}{a} = \frac{5}{2}$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(2+3i)^2 = i(5i+12)$, unde $i^2 = -1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + a$. Determinați numărul real a, astfel încât $(f\circ f)(x) = f(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5\cdot 2^{x+1}\cdot 3^x = 12\cdot 5^x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$, care au proprietatea $f(1)\geq 3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră rombul $ABCD$ cu $A(-1,3)$ și $C(-2,4)$. Determinați panta dreptei BD.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x)) = 6^x$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că, orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X = A(1)$ are două elemente numere iraționale.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y = x^2 + xy + y^2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ x\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră numerele reale a și b cu $a\neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x\circ a = x\circ b$.

5p **c)** Determinați numărul real x cu proprietatea că $x\circ(x+1) = -x^3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x-(x+1)\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = 1-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}-e$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n(x-f(x))dx$. Demonstrați că $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4-9+12i=-5+12i=$	**3p**
	$=5i^2+12i=i(5i+12)$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=x+a+a=x+2a$, $f(x+1)=x+1+a$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x+2a=x+1+a\Rightarrow a=1$	**2p**
3.	$5\cdot 2\cdot 2^x\cdot 3^x=12\cdot 5^x\Leftrightarrow 10\cdot 6^x=12\cdot 5^x$	**3p**
	$\left(\frac{6}{5}\right)^x=\frac{6}{5}$, deci $x=1$	**2p**
4.	$f(1)$ poate fi aleasă în două moduri, iar $f(2)$ și $f(3)$ pot fi alese în câte patru moduri	**3p**
	Există $4^2\cdot 2=32$ de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ astfel încât $f(1)\geq 3$	**2p**
5.	$m_{AC}=-1$	**2p**
	Cum $BD\perp AC$, obținem $m_{BD}=1$	**3p**
6.	$\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, deci $x=\frac{\pi}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{vmatrix}=2^x\cdot 3^x-0\cdot 0=$	**3p**
	$=(2\cdot 3)^x=6^x$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 2^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 3^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2^x & 2^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 3^x\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2^x=3^x$, de unde obținem $x=0$	**2p**
c)	$X\cdot X\cdot X=A(1)\cdot X$ și $X\cdot X\cdot X=X\cdot A(1)\Rightarrow A(1)\cdot X=X\cdot A(1)$, deci, pentru $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, unde a, b, c și d sunt numere reale, obținem $\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 3c & 3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 3b\\ 2c & 3d\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=0$ și $c=0$	**3p**
	$\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow a\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$ și $d\in\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$, deci orice matrice X, pentru care $X\cdot X=A(1)$, are două elemente numere iraționale	**2p**

2.a)	$x \circ x = x^2 + x \cdot x + x^2 =$ $= 3x^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
b)	$x^2 + xa + a^2 = x^2 + xb + b^2 \Leftrightarrow x(a-b) + \left(a^2 - b^2\right) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(x+a+b) = 0$ Cum $a \neq b$, obținem $x = -a - b$	**3p** **2p**
c)	$x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = -x^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ $(x+1)^3 = 0$, de unde obținem $x = -1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2 - \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} =$ $= 2 - \ln(x+1) - 1 = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e - 1$ Pentru orice $x \in (-1, e-1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-1, e-1]$ și pentru orice $x \in [e-1, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e-1, +\infty)$	**2p** **3p**
c)	$f''(x) = -\frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$ Cum, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ avem $-\frac{1}{x+1} < 0$, obținem $f''(x) < 0$, deci f este concavă	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - e^x\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - e^x\right)\Big\|_0^1 =$ $= \frac{1}{2} - e + 1 = \frac{3}{2} - e$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 x\left(x - e^x\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 - xe^x\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big\|_0^1 - (x-1)e^x\Big\|_0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
c)	$I_n = \int_0^1 x^n \left(x - f(x)\right)dx = \int_0^1 x^n e^x \, dx = x^n e^x \Big\|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx =$ $= e - nI_{n-1}$, de unde obținem $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați partea întreagă a numărului $2+3\sqrt{5}$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+5$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x$ și $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2+x$. Arătați că $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{3}$.
5p	**4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,30\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii A care sunt divizibile cu 2 sau cu 3.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul G, centrul său de greutate și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$. Arătați că punctele M, N și G sunt coliniare.
5p	**6.** Arătaţi că, dacă triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază $\frac{1}{2}$, atunci $\cos^2 A=1-BC^2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(a))=4$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^n A(x)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-7$.
5p	**a)** Arătați că $5\circ 2=0$.
5p	**b)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=7+\log_7 x$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Demonstrați că $a^2\circ b^2\neq 0$, pentru orice numere întregi a și b.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}(x-5)$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
5p	**c)** Arătaţi că $e^{2x}\leq\frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

5p **c)** Determinați $a \in (1, +\infty)$ astfel încât $\int_0^x f(e^t) dt = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right) + \ln(a-1)$, pentru orice număr real x.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left[2+3\sqrt{5}\right]=2+\left[3\sqrt{5}\right]=2+\left[\sqrt{45}\right]$	**2p**
	$36<45<49\Rightarrow 6<3\sqrt{5}<7$, deci partea întreagă a numărului $2+3\sqrt{5}$ este egală cu 8	**3p**
2.	$(f\circ g)(x)=f(g(x))=g^2(x)-4g(x)+5=(2-x)^2-4(2-x)+5=x^2+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(f\circ h)(x)=f(h(x))=h^2(x)-4h(x)+5=(2+x)^2-4(2+x)+5=x^2+1$, pentru orice număr real x, deci $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$x+3+2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{3-x}+3-x=12\Rightarrow\sqrt{(x+3)(3-x)}=3\Rightarrow 9-x^2=9$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 15 numere divizibile cu 2 și 10 numere divizibile cu 3	**2p**
	Cum în mulțimea A sunt 5 numere care sunt divizibile și cu 2 și cu 3, obținem că în mulțimea A sunt $15+10-5=20$ de numere care sunt divizibile cu 2 sau cu 3	**3p**
5.	$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{12}\left(-5\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right)$, unde D este mijlocul segmentului BC	**3p**
	$\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{15}\left(-5\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right)=\frac{12}{15}\overrightarrow{MG}$, deci $\overrightarrow{MG}$ și $\overrightarrow{GN}$ sunt coliniari, de unde obținem că punctele M, N și G sunt coliniare	**2p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R$ și, cum $R=\frac{1}{2}$, obținem $BC=\sin A$	**3p**
	$\cos^2 A=1-\sin^2 A=1-BC^2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-0\cdot a=$	**3p**
	$=4-0=4$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ b & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2a+2b & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ a+b & 2\end{pmatrix}=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2A(1+2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^4A(1+2+3+4+5)=2^4A(15)$	**3p**
	$2^4\begin{pmatrix}2 & 0\\ 15 & 2\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}2 & 0\\ x & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow n=4$ și $x=15$	**2p**
2.a)	$5\circ 2=5+2-7=$	**3p**
	$=7-7=0$	**2p**

b)	$f(x)\circ f(y)=f(x)+f(y)-7=7+\log_7 x+7+\log_7 y-7=$ $=7+\log_7 x+\log_7 y=7+\log_7(xy)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
c)	$a^2\circ b^2=0\Leftrightarrow a^2+b^2=7$ Pentru $a,b\in\mathbb{Z}$ cu $\lvert a\rvert\geq 3$ sau $\lvert b\rvert\geq 3$, obținem $a^2+b^2\geq 9$, deci $a^2\circ b^2\neq 0$ Pentru $a,b\in\mathbb{Z}$ cu $\lvert a\rvert\leq 2$ și $\lvert b\rvert\leq 2$, obținem $a^2+b^2\in\{0,1,2,4,5,8\}\Rightarrow a^2+b^2\neq 7$, deci $a^2\circ b^2\neq 0$, pentru orice numere întregi a și b	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^{2x}\cdot 2\cdot(x-5)+e^{2x}\cdot 1=$ $=e^{2x}(2x-10+1)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}(2x-9)}{e^{2x}(x-5)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-9}{x-5}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{9}{x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}=2$	**3p** **2p**
c)	$x\in\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f descrescătoare pe $\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$ și $x\in\left[\frac{9}{2},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f crescătoare pe $\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$; obținem $f(x)\geq f\left(\frac{9}{2}\right)=-\frac{e^9}{2}$, pentru orice număr real x Cum $e^{2x}(x-5)\geq-\frac{e^9}{2}$ și $x-5<0$, pentru orice $x\in(-\infty,5)\Rightarrow e^{2x}\leq\dfrac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^2 x\,dx=$ $=\left.\frac{x^2}{2}\right\vert_0^2=\frac{4}{2}-0=2$	**2p** **3p**
b)	$\int_1^2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\int_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=$ $=\left.\sqrt{x^2+1}\right\vert_1^2+\left.\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\vert_1^2=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^x f(e^t)dt=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{e^{2t}+1}}\cdot(e^t)'dt=\left.\ln\left(e^t+\sqrt{e^{2t}+1}\right)\right\vert_0^x=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, pentru orice număr real x $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)+\ln(a-1)$, pentru orice număr real x, deci $-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\ln(a-1)\Leftrightarrow a-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, de unde obținem $a=\sqrt{2}$, care convine	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ cu $a_1 = 1 - 3\sqrt{3}$ și rația $r = \sqrt{3}$. Arătați că partea fracționară a lui a_5 este egală cu $\sqrt{3} - 1$.

5p **2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Arătați că numărul $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$ este natural.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(5x-1) = 2\log_3(x+1)$.

5p **4.** Determinați numărul de mulțimi X cu proprietatea $\{1,2,3\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că $2\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC = 8\sqrt{2}$. Arătați că raza cercului înscris în ΔABC este egală cu $4\left(2-\sqrt{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a)) = 0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(2) + xI_2) = 0$.

5p **c)** Arătați că, dacă $A(a)\cdot A(b) = A(b)\cdot A(a)$, atunci $a = b$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $0 * 8 = 4$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$" **nu** are element neutru.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln x \ge \sqrt{\ln x + 1} + 1 - \sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\left(x^2 - 4x + 5\right)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = \frac{10}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

5p **c)** Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = e^x\left(ax^2 + bx + c\right)$ este o primitivă a funcției f.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_5 = a_1 + 4r = 1 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$	**2p**
	Cum $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 2 < 1 + \sqrt{3} < 3$, obținem că $\{a_5\} = a_5 - [a_5] = 1 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - 1$	**3p**
2.	$f(-2) = f(2) = \sqrt{5}$, $f(-1) = f(1) = \sqrt{2}$, $f(0) = 1$	**3p**
	$f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) = \sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 1 = 10 \in \mathbb{N}$	**2p**
3.	$\log_3(5x-1) = \log_3(x+1)^2 \Rightarrow 5x - 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$	**3p**
	$x = 1$ sau $x = 2$, care convin	**2p**
4.	$\{1,2,3\} \subset X \Rightarrow 1,2,3 \in X$	**2p**
	$X \subset \{1,2,3,4,5\} \Rightarrow X = \{1,2,3\}$, $X = \{1,2,3,4\}$, $X = \{1,2,3,5\}$ sau $X = \{1,2,3,4,5\}$, deci există 4 mulțimi X astfel încât $\{1,2,3\} \subset X \subset \{1,2,3,4,5\}$	**3p**
5.	$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(a\vec{i} + 3\vec{j}) + 3(2\vec{i} + b\vec{j}) = (2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j}$	**2p**
	$(2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j} = \vec{0}$, deci $a = -3$ și $b = -2$	**3p**
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC = 8\sqrt{2}$, deci $AB = AC = 8$	**2p**
	$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{32}{4(2+\sqrt{2})} = 4(2-\sqrt{2})$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 1 \cdot a^3 - a \cdot a^2 =$	**3p**
	$= a^3 - a^3 = 0$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(2) + xI_2 = \begin{pmatrix} 1+x & 2 \\ 4 & 8+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xI_2) = x^2 + 9x$, deci $x^2 + 9x = 0$	**3p**
	$x = -9$ sau $x = 0$	**2p**
c)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix}$, $A(b) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$\begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = b$	**2p**
2.a)	$0 * 8 = \sqrt[3]{0^2 + 8^2} =$	**3p**
	$= \sqrt[3]{64} = 4$	**2p**

b)	Dacă e este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”, atunci $e*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e*0=0\Rightarrow\sqrt[3]{e^2}=0$ și obținem $e=0$	**3p**
	Cum $0*8=4\neq 8$, $e=0$ nu este element neutru al legii de compoziție „$*$”, deci legea de compoziție „$*$” nu are element neutru	**2p**
c)	De exemplu, pentru $m=2k^3$ și $n=2k^3$, unde $k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m*n=\sqrt[3]{m^2+n^2}=\sqrt[3]{\left(2k^3\right)^2+\left(2k^3\right)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{8k^6}=2k^2\in\mathbb{N}^*$, deci există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\sqrt{x+1}\right)'=$	**2p**
	$=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x+1=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$	**2p**
	Pentru $x\in\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right]$ și, pentru $x\in\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$ $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$	**3p**
c)	$\ln x\geq 1$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$ și f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(\ln x)\geq f(1)\Rightarrow \ln x-\sqrt{\ln x+1}\geq 1-\sqrt{2}\Rightarrow \ln x\geq\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1\frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{e^x}dx=\int_0^1\left(x^2-4x+5\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+5x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}-2+5=\dfrac{10}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)$ și $F''(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)+e^x(2x-4)=e^x\left(x^2-2x+1\right)=e^x(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$e^x(x-1)^2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci, pentru orice primitivă F a lui f, obținem $F''(x)\geq 0$, pentru orice număr real x, deci F este convexă	**2p**
c)	$F'(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)+e^x(2ax+b)=e^x\left(ax^2+(b+2a)x+c+b\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$ax^2+(b+2a)x+c+b=x^2-4x+5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, de unde obținem $a=1$, $b=-6$ și $c=11$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că diferența numerelor $5+2\sqrt{3}$ și $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ este număr întreg.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^2+2x$. Determinați numerele reale m, pentru care $f(m)=g(m)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+5x+1}=\sqrt{2x+5}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\{-2,-1,1,2,3\}$, acesta să verifice inegalitatea $|a+1|\geq 2$.

5p **5.** Se consideră A, B, C și D patru puncte coplanare, M mijlocul segmentului AD și N mijlocul segmentului BC. Arătați că $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

5p **6**. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 1. Arătați că $4\sin A\cdot\sin B=AC\cdot BC$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\left(-1,\sqrt{2}\right)\cdot X=A(0,0)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=5xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 4=25$.

5p **b)** Demonstrați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Se consideră dreapta d, asimptota spre $+\infty$ la graficul lui f. Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\left[0,\sqrt{3}\right]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cos x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^{\pi}\dfrac{f(x)}{e^x}dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = -e^{\frac{\pi}{2}}\ln 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$5+2\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{3}-\left(4+2\sqrt{3}\right)=$	**3p**
	$=5+2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}=1$, care este număr întreg	**2p**
2.	$2m+1=2m^2+2m\Leftrightarrow m^2=\frac{1}{2}$	**3p**
	$m=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$	**2p**
3.	$x^2+5x+1=2x+5\Rightarrow x^2+3x-4=0$	**3p**
	$x=-4$, care nu convine, sau $x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $\lvert a+1\rvert\geq 2$ sunt 1, 2 și 3, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$	**2p**
	$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$, deci $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$	**3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=2R$ și, cum $R=1$, obținem $BC=2\sin A$ și $AC=2\sin B$	**3p**
	$4\sin A\cdot\sin B=2\sin B\cdot 2\sin A=AC\cdot BC$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(2,3)=\begin{pmatrix}3&1\\3&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2,3)\right)=\begin{vmatrix}3&1\\3&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3-3=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(a,b)\right)=\begin{vmatrix}a+1&a-1\\b&b-2\end{vmatrix}=(a+1)(b-2)-b(a-1)=2(b-a-1)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow b-a-1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow\det\left(A(a,b)\right)\neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	**2p**
c)	$A\left(-1,\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix}0&-2\\\sqrt{2}&\sqrt{2}-2\end{pmatrix}$, $\det\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)=2\sqrt{2}$, $\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)^{-1}\cdot A(0,0)$ și, cum $A(0,0)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-2\end{pmatrix}$, obținem $X=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{2}}{2}&-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1\circ 4=5\cdot 1\cdot 4+1+4=$ $=20+5=25$	**2p** **3p**
b)	$x\circ 0=5x\cdot 0+x+0=x$, pentru orice număr întreg x $0\circ x=5\cdot 0\cdot x+0+x=x$, pentru orice număr întreg x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**2p** **3p**
c)	$x\in\mathbb{Z}$ element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$”$\Leftrightarrow$ există $x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=0\Leftrightarrow 5xx'+x+x'=0$, deci $x'=\dfrac{-x}{5x+1}$ și, cum $x,x'\in\mathbb{Z}$, obținem $5x+1=-1$ sau $5x+1=1$ $x=-\dfrac{2}{5}$, care nu convine, sau $x=0$, care convine	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$ $=\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3+x}=1$, deci panta dreptei d este 1 Tangenta la graficul lui f în $A(a,f(a))$ are panta 1, dacă $f'(a)=1\Leftrightarrow\dfrac{a^2\left(a^2+3\right)}{\left(a^2+1\right)^2}=1$, de unde obținem $a^2=1$, deci $a=-1$ sau $a=1$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $x\in\mathbb{R}$ Cum $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left[0,\sqrt{3}\right]$, obținem că funcția f este convexă pe $\left[0,\sqrt{3}\right]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^{\pi}\dfrac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^{\pi}\dfrac{e^x\cos x}{e^x}dx=\int_0^{\pi}\cos x\,dx=$ $=\sin x\Big\vert_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=e^x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\cos x)'dx=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=-1+e^x\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=$ $=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{e^{x+\frac{\pi}{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{e^x\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{-\sin x}{\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}=$ $=e^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos 0)=e^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{1}{2}-e^{\frac{\pi}{2}}\ln 1=-e^{\frac{\pi}{2}}\ln 2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele raționale a și b, știind că $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=a+b\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$. Arătați că $f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)=3$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $4^x-4^{\frac{2x+3}{2}}=-7$.

5p **4.** Determinați numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $A(-1,3)$, $B(3,5)$ și $C(-4,-2)$. Determinați ecuația dreptei AD.

5p **6**. Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $\operatorname{tg}2x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=2\\ y+3z=4\\ 2x-y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=18$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=1$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, astfel încât $a*x=a$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Demonstrați că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(2^x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x+2}dx=1$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=\sqrt{2}+1+3-2\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$	**2p**
	Cum a și b sunt numere raționale $4-\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}\Leftrightarrow a=4$ și $b=-1$	**3p**
2.	$f(2020)=\frac{2020^2+2}{2020^2+1}$	**2p**
	$f\left(\frac{1}{2020}\right)=\frac{2\cdot 2020^2+1}{2020^2+1}\Rightarrow f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)=\frac{2020^2+2}{2020^2+1}+\frac{2\cdot 2020^2+1}{2020^2+1}=\frac{3\left(2020^2+1\right)}{2020^2+1}=3$	**3p**
3.	$2^{2x}-2^{2x+3}=-7\Leftrightarrow 2^{2x}\left(1-2^3\right)=-7\Leftrightarrow 2^{2x}=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Sunt $3^3=27$ de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$	**2p**
	Deoarece numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ pentru care $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\neq 0$ este egal cu $2^3=8$, obținem că numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=0$ este egal cu $27-8=19$	**3p**
5.	$AD\parallel BC\Rightarrow m_{AD}=m_{BC}$, deci $m_{AD}=1$	**3p**
	Ecuația dreptei AD este $y-3=1\cdot(x+1)$, deci $y=x+4$	**2p**
6.	$\operatorname{tg} 2x=-1$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, deci $2x=\frac{7\pi}{4}$	**3p**
	$x=\frac{7\pi}{8}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\2&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+12-(-2)-(-3)-0=18$	**3p**
b)	Sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow\det(A(a))\neq 0$	**2p**
	$\det(A(a))=a+17$, deci $\det(A(a))\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-17\}$	**3p**
c)	Pentru $a=1$, obținem $\det(A(1))=18\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică	**2p**
	Soluția sistemului de ecuații este $(1,1,1)$	**3p**
2.a)	$2*\frac{1}{2}=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}+1=$	**3p**
	$=2-2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$	**2p**

b)	$a * x = a \Leftrightarrow 2ax - a - x + 1 = a \Leftrightarrow (2a-1)(x-1) = 0$, pentru orice număr real x	**3p**
	$a = \frac{1}{2}$	**2p**
c)	$f(x * y) = 2(x * y) - 1 = 2(2xy - x - y + 1) - 1 = 4xy - 2x - 2y + 2 - 1 =$	**3p**
	$= 4xy - 2x - 2y + 1 = (2x-1)(2y-1) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' - \left(\ln\left(2^x + 1\right)\right)' =$	**2p**
	$= 1 - \frac{1}{2^x + 1} \cdot \left(2^x + 1\right)' = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$0 < \frac{2^x}{2^x + 1} < 1$, pentru orice număr real x și $0 < \ln 2 < 1$, deci $\frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} < 1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} > 0$, pentru orice număr real x, deci f este crescătoare	**3p**
c)	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{\ln\left(2^x + 1\right)}{x}\right) = 1 - 0 = 1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\ln\left(2^x + 1\right)\right) = -\ln 1 = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x+2)\sin x}{x+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} =$	**3p**
	$= -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$	**2p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)(\cos x)' \, dx = -(x+2)\cos x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$	**3p**
	$= -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\cos\frac{\pi}{2} + (0+2)\cos 0 + \sin x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 3$	**2p**
c)	$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{f^2(x)} dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{(x+2)^2 \sin^2 x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} \Big\vert_{\frac{1}{n}}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p**
	$-\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{9}$, deci $n = 4$, care convine	**2p**